**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №7**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: Численное интегрирование

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 7383 |  | Кирсанов А.Я. |
| Преподаватель |  | Сучков А.И. |

Санкт-Петербург

2018

**Цель работы.**

В работе требуется, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона, вычислить значения заданного интеграла и, применив правило Рунге, найти наименьшее значение  (наибольшее значение шага ), при котором каждая из указанных формул дает приближенное значение интеграла с погрешностью , не превышающей заданную.

**Основные теоретические положения.**

Повышения точности численного интегрирования добиваются путем применения составных формул. Для этого при нахождении определенного интеграла отрезок  разбивают на четное  число отрезков длины  и на каждом из отрезков длины  применяют соответствующую формулу. Таким способом получают составные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

На сетке , , , составные формулы имеют следующий вид:

формула прямоугольников:

;

формула трапеций:

;

формула Симпсона:

,

где , ,  – остаточные члены. При  приближенные значения интегралов для всех трех формул (в предположении отсутствия погрешностей округления) стремятся к точному значению интеграла.

Для практической оценки погрешности квадратуры можно использовать правило Рунге. Для этого проводят вычисления на сетках с шагом  и , получают приближенные значения интеграла  и  и за окончательные значения интеграла принимают величины для формулы прямоугольников:

; (1)

для формулы трапеций:

; (2)

для формулы Симпсона:

. (3)

За погрешность приближенного значения интеграла для формул прямоугольников и трапеций тогда принимают величину , а для формулы Симпсона .

**Постановка задачи.**

Порядок выполнения:

1) Составить программы-функции для вычисления интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

2) Составить программу-функцию для вычисления подынтегральной функции.

3) Составить головную программу, содержащую оценку по Рунге погрешности каждой из перечисленных выше квадратурных формул, удваивающих  до тех пор, пока погрешность не станет меньше , и осуществляющих печать результатов: значения интеграла и значения  для каждой формулы.

4) Провести вычисления по программе, добиваясь, чтобы результат удовлетворял требуемой точности.

**Выполнение работы.**

В задании, согласно варианту, был вычислен интеграл

. (4)

В головной программе составлены функции вычисления подынтегральной функции, функции вычисления интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона (1), (2) и (3) соответственно, и их оценки по Рунге. Исходный код программы представлен в приложении А.

В табл. 1, 2 и 3 представлены результаты тестирования программы расчета интеграла по формулам (1), (2), (3) соответственно.  меняется от 0.1 до 0.0001. Точное значение интеграла – 0.443028.

Таблица 1 – Результаты вычислений интеграла (4) по формуле (2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Значение | Значение интеграла (4) | Число отрезков | Требуемая точность достигнута |
| 0.1 | 0.480962 | 2 | Да |
| 0. 01 | 0.443056 | 4 | Да |
| 0.001 | 0.443056 | 4 | Да |
| 0.0001 | 0.443056 | 4 | Да |

Таблица 2 – Результаты вычислений интеграла (4) по формуле (2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Значение | Значение интеграла (4) | Число отрезков | Требуемая точность достигнута |
| 0.1 | 0.404967 | 2 | Да |
| 0. 01 | 0.442965 | 4 | Да |
| 0.001 | 0.442965 | 4 | Да |
| 0.0001 | 0.442965 | 4 | Да |

Таблица 3 – Результаты вычислений интеграла (4) по формуле (3)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Значение | Значение интеграла (4) | Число отрезков | Требуемая точность достигнута |
| 0.1 | 0.409673 | 2 | Да |
| 0. 01 | 0.44059 | 4 | Да |
| 0.001 | 0.443113 | 8 | Да |
| 0.0001 | 0.443113 | 8 | Да |

**Выводы.**

В работе изучено численное интегрирование, реализованное с помощью формул прямоугольников, трапеций и Симпсона. Вычисленное по ним значение интеграла (4) равно истинному с заданной погрешностью, причем число отрезков  тем больше, чем точнее требуется вычислить интеграл. Преимуществом таких вычислений является возможность считать интегралы, которые нельзя представить в виде элементарных функций. Таким интегралом является интеграл (4).

Приложение А

Исходный код программы

#include <iostream>

#include <cmath>

using namespace std;

double rectangle(double a, double b, int n);

double trapezium(double a, double b, int n);

double Simpson(double a, double b, int n);

double F(double x);

int main()

{

double exact = 0.443028;

double a = 0;

double b = 3.1415926535;

double eps, check, rect, tr, sm;

int n = 1;

cout << "Enter Eps" << endl;

cin >> eps;

do{

check = abs(rectangle(a,b,2\*n)-rectangle(a,b,n))/3;

rect = rectangle(a,b,2\*n) + check;

n \*= 2;

}while(abs(rect - exact) > eps);

cout <<"rectangle: " << rect << " n: " << n/2 << endl;

n = 1;

do{

check = abs(trapezium(a,b,2\*n)-trapezium(a,b,n))/3;

tr = trapezium(a,b,2\*n) - check;

n \*= 2;

}while (abs(tr - exact) > eps);

cout <<"trapezium: " << tr << " n: " << n/2 << endl;

n = 1;

do{

check = abs(Simpson(a,b,2\*n)-Simpson(a,b,n))/15;

sm = Simpson(a,b,2\*n) - check;

n \*= 2;

cout << sm - exact << " " << n << endl;

}while (abs(sm - exact) > eps);

cout <<"Simpson: " << sm << " n: " << n/2 << endl;

return 0;

}

double F(double x){

return pow(x,2)\*exp(-pow(x,2));

}

double rectangle(double a, double b, int n){

double rect = 0;

double h = (b-a)/n;

for(int i = 0; i < n; i++){

rect += F(a+i\*h+h/2);

}

rect \*= h;

return rect;

}

double trapezium(double a, double b, int n){

double tr = 0;

double h = (b-a)/n;

for(int i = 0; i < n; i++){

tr += F(a+i\*h) + F(a+(i+1)\*h);

}

tr \*= h/2;

return tr;

}

double Simpson(double a, double b, int n){

double sm = 0;

double h = (b-a)/n;

for(int i = 0; i < n; i++){

sm += F(a+2\*i\*h) + 4\*F(a+(2\*i+1)\*h) + F(a+(2\*i+2)\*h);

}

sm \*= h/3;

return sm;

}